§ 1. Алғашқы функция. Анықталмаған интеграл.

Анықтама 1. $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының $\langle a,b\rangle \subseteq (-\infty,+\infty)$ аралығындағы ***алғашқы бейнесі*** деп аталады , егер бір мезгілде келесі екі шарт орындалса:

1. $F(x)$- $\langle a,b\rangle$ аралығында дифференциалданса,
2. $F'(x)= f(x), \quad \forall x \in \langle a,b\rangle$.

Егер $F(x)$ функциясы $\langle a,b\rangle$ аралығында $f(x)$ функциясының алғашқы бейнесі болса, онда $F(x)+C$ (С-тұрақты сан) функциясы да осы аймақта $f(x)$ функциясының алғашқы бейнесі болатыны айқын, себебі

$$(F(x)+C)' = f(x).$$

Анықтама 2. $f(x)$ функциясының $\langle a,b\rangle$ аралығындағы барлық алғашқы бейнелерінің жиыны осы аралықтағы $f(x)$ функциясының ***анықталмаған интегралы*** деп аталады және

$$\int f(x)dx$$

символымен белгіленеді.

Мұндағы "$\int$ " – белгісі <u>интеграл</u> таңбасы, $f(x)dx$– өрнегін интеграл астындағы өрнек, ал $f(x)$ функциясын– интеграл астындағы функция деп атайды.

Егер $f(x)$ функциясының $\langle a,b\rangle$ аралығындағы алғашқы бейнелерінің біреуі $F(x)$ болса, онда

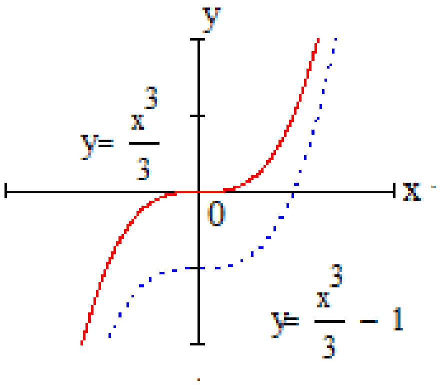
$$\int f(x)dx = F(x)+C, \quad C = const .$$

Мысал 1. $f(x)=x^2$ функциясын қарастырайық. Бұл функция - $(-\infty;+\infty)$ аралығында дифференциалданатын $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$ функциясының туындысы.

$$F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2, \quad \forall x \in (-\infty;+\infty).$$

Демек, $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$ функциясы $(-\infty;+\infty)$ аралығындағы $f(x)=x^2$ функциясының *алғашқы бейнесі* болады.

Төмендегі суретте $f(x)=x^2$ функциясының $F(x)=\frac{x^3}{3}+C$ алғашқы бейнесінің $C=0;-1$ жағдайдағы кескіндері келтірілген.



1-сурет

Мысал 2. $F(x)=\sqrt{1-x^2}$ функциясы $f(x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ функциясының (-1,1) аралығында алғашқы бейнесі, өйткені осы аралықтың кез-келген x нүктесінде $\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Мысал 3. $F(x)=arctg\frac{1}{x}$ функциясы $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ аймағында $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ функцясының алғашқы бейнесі, өйткені осы аймақтың барлық нүктелерінде $\left(arctg\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{1+x^2}$.

Анықталмаған интегралдардың негізгі қасиеттері.

1. $d\int f(x)dx=f(x)dx$ - анықталмаған интегралдың дифференциалы табылады және ол интеграл астындағы өрнекке тең.

$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$ - анықталмаған интегралдың туындысы интеграл астындағы функцияға тең.

2. $\int dF(x)=F(x)+C, \quad \int dF(x)=\int F'(x)dx=\int f(x)dx$

3. $\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$ -

екі функцияның қосындысының (айырмасының) анықталмаған интегралы әрқайсысының анықталмаған интегралдарының қосындысына (айырмасына) тең.

4. $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx, \quad \forall A \in R \setminus \{0\}$.

Ескерту. 3 және 4 қасиеттері анықталмаған интегралдың сызықтық қасиеттері деп аталады. Бұл қасиеттердің теңдігін алғашқы бейнелерден құрылған жиындардың теңдігі ретінде түсіну керек, яғни, теңдіктің оң жағындағы кез келген функцияның сол жағындағы функциядан тұрақтыға ғана айырмашылығы бар.

Интегралдарды табу үшін интегралдар кестесін білу қажет. Ол негізгі элементар функциялардың туындыларының кестесінен шығады.

Анықталмаған интегралдардың негізгі кестесі.

1. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \quad a \succ 0, \;\; a \neq 1$

4. $\int e^x dx = e^x + C$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} arctgx + C \\ -arcctgx + C \end{cases}$

11. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + C$

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$

13. $\int chxdx = shx + C$

14. $\int shxdx = chx + C$

15. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$

16. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$

Мұндағы $C = const$.

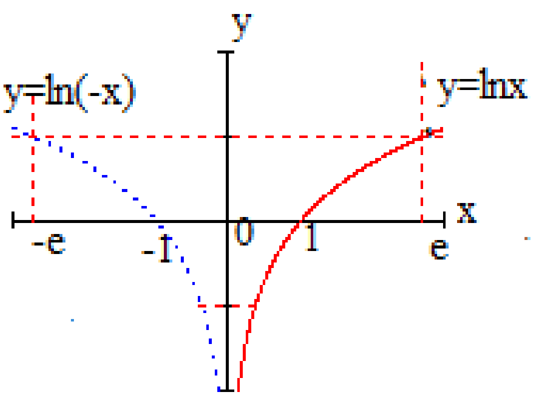
Кестедегі кейбір теңдіктерге түсініктеме берейік.

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

$F(x) = \ln|x| : R \setminus \{0\} \to R$ функциясын қарастырайық.

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{егер} \quad x > 0 \\ \ln(-x), & \text{егер} \quad x < 0 \end{cases}$$

$\forall x > 0 \quad f(x) = F'(x) = \ln' x = \frac{1}{x}$



2-сурет

$x < 0$ болғанда $F'(x)$ туындысын табайық:

$f(x) = F'(x) = [\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$.

Олай болса, $f(x) = \frac{1}{x}$ функциясы $x > 0$ болғанда $F(x) = \ln x$ функциясының туындысы, сол сияқты $x < 0$ болғанда $F(x) = \ln(-x)$ функциясының да туындысы болады. Нәтижесінде

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

11. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| : R \setminus \{\pm 1\} \to R$$

$$F(x) = \begin{cases} F(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|, \ \textit{егер} \ \frac{1+x}{1-x} > 0, & (-1 < x < 1) \\ F(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|, \ \textit{егер} \ \frac{1+x}{1-x} < 0, & \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 1 \end{array}\right. \end{cases}$$

Осы функцияның туындысын табайық.

$\forall x \in (-1;1)$ үшін

$$f(x) = F'(x) = \left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x^2}$$

Егер $x \in (1,+\infty)$ болса, онда

$$f(x) = F'(x) = \left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{x-1}\right) = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(x-1)) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{1-x^2}$$

Сондықтан $\forall x \in R \setminus \{\pm 1\}$ үшін

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$

Бұл теңдікті $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ және $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ жағдайлары үшін жеке-жеке қарастырайық. Бірінші жағдайда интеграл астындағы функция мен алғашқы бейнесінің анықталу облыстары R нақты сандар жиыны болғандықтан,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C \text{, бұл жағдайда}$$

$$f(x)=F'(x)=\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Екінші жағдайды қарастырайық,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \text{ болсын.}$$

Бұл функцияның анықталу облысы:

$$(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)=R\setminus[-1;1].$$

$$F(x)=\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| : R\setminus[-1;1]\to R$$

$$F(x)=\begin{cases} x+\sqrt{x^2-1}, & \textit{егер} \quad x+\sqrt{x^2-1}>0 \quad (\textit{егер} \;\; x>1) \\ -x-\sqrt{x^2-1}, & \textit{егер} \quad x+\sqrt{x^2-1}<0 \quad (\textit{егер} \;\; x<-1) \end{cases}$$

Осы функцияның туындысын табайық. Егер $x>1$ болса, онда

$$f(x)=F'(x)=\ln'\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)==\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$

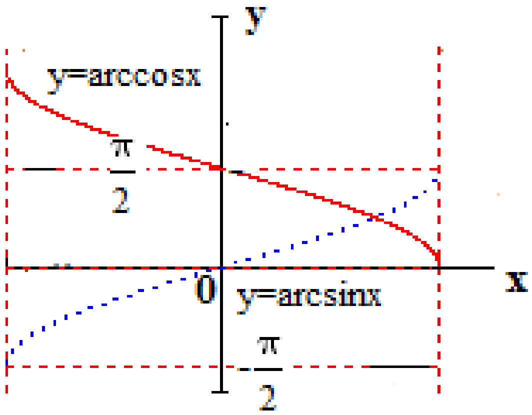
егер $x<-1$ болса, онда

$$f(x)=F'(x)=\ln'\left(-x-\sqrt{x^2-1}\right)==\frac{-1-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{-x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

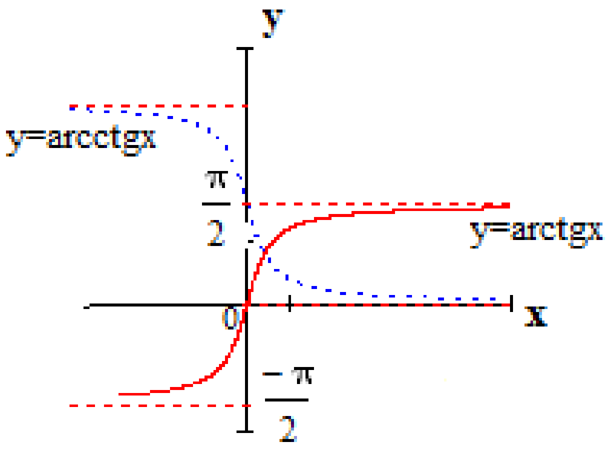
Сондықтан $\forall x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ болғанда

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}+C\right|.$$

Кестедегі 9, 10 формулаларда интеграл астындағы функцияның екі алғашқы бейнелері берілген. Бұл анықталмаған интегралдың анықтамасына қайшы келмейді. Себебі, бұл алғашқы бейнелердің бір-бірінен тұрақтыға ғана айырмашылығы бар. Мұны төмендегі суреттерден көруге болады.



3-сурет



4-сурет

Енді 9, 10,11, 12 формулалардың жалпы жағдайларын қарастырайық.

9*. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$

мұнда $a-$кез келген оң сан, оны бөлімдегі түбірден шығарып, дифференциал астына енгіземіз:

$$= \int \frac{dx}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \begin{cases} \arcsin\frac{x}{a} + C \\ -\arccos\frac{x}{a} + C, \end{cases} \qquad \forall a > 0$$

Дәл осы сияқты келесі үш формула шығады:

10*.

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C \\ -\frac{1}{a} arcctg\frac{x}{a} + C, \end{cases} \qquad \forall a \neq 0$$

11*. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} =$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{1+\frac{x}{a}}{1-\frac{x}{a}}\right| + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

12*. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} =$$

мұнда $m \neq 0$ кез келген нақты сан;

1). $m > 0$ болсын:

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{m} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{m}+1}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{\sqrt{m}}\right)}{\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{m}}\right)^2+1}} = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{m}} + \sqrt{\frac{x^2}{m}+1}\right) + C = \ln\frac{x+\sqrt{x^2+m}}{\sqrt{m}} + C =$$

$$= \ln\left(x+\sqrt{x^2+m}\right) - \ln\sqrt{m} + C = \ln\left(x+\sqrt{x^2+m}\right) + C;$$

2). $m < 0$ болсын:

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{-m}\sqrt{\frac{x^2}{-m}-1}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{\sqrt{-m}}\right)}{\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{-m}}\right)^2-1}} =$$

$$= \ln\left|\frac{x}{\sqrt{-m}} + \sqrt{\frac{x^2}{-m}-1}\right| + C = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+m}}{\sqrt{-m}}\right| + C =$$

$$= \ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right| + C.$$

Алынған нәтижелерді біріктіріп:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right| + C, \quad \forall m \neq 0$$

теңдігін аламыз.

Негізгі кесте бойынша анықталмаған интегралдарды табуға мысалдар келтірейік. Келесі мысалдарда берілген интегралдарды табу үшін кестелік интегралдарға келтіре білу керек. Ол үшін келесі тұжырымдарға назар аудару қажет: интегралдау айнымалысын кез келген әріппен немесе өрнекпен белгілеуге болады, мысалы:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C \qquad \int f^2 df = \frac{f^3}{3} + C$$

$$\int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C \qquad \int f^2(x) df(x) = \frac{f^3(x)}{3} + C$$

$$\int f^2(x) f'(x) dx = \frac{f^3(x)}{3} + C$$

$df(x) = f'(x)dx$ болғандықтан, дербес жағдайда,

$$\int \sin^2 x d(\sin x) = \int \sin^2 x \cdot \cos x dx = \frac{\sin^3 x}{3} + C,$$

$\int \frac{1-\cos^2 x}{(1-\sin^2 x)^2} dx = \frac{tg^3 x}{3} + C$ болады, өйткені:

$$\int \frac{1-\cos^2 x}{(1-\sin^2 x)^2} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx = \int tg^2 x \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = \int tg^2 x \quad d(tgx)$$

Мысал 4. $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx = \int \frac{2 \cdot 2^x - \frac{1}{5} \cdot 5^x}{2^x \cdot 5^x} dx = 2\int \left(\frac{1}{5}\right)^x dx - \frac{1}{5} \int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx =$

$$= 2\left(\frac{1}{5}\right)^x \frac{1}{\ln\frac{1}{5}} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^x \frac{1}{\ln\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{\ln 5}\left(\frac{1}{5}\right)^x + \frac{1}{5\ln 2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + C$$

Мысал 5.

$$\int th^2 x dx = \int \frac{sh^2 x}{ch^2 x} dx = \int \frac{ch^2 x - 1}{ch^2 x} dx = \int \left(1 - \frac{1}{ch^2 x}\right) dx =$$

$$= \int 1 \cdot dx - \int \frac{dx}{ch^2 x} = x - thx + C$$

Мысал 6. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} =$

интеграл астындағы функцияның анықталу облысы $(0, +\infty)$ интервалы, ал $d(\sqrt{x}) = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ болғандықтан, интегралды келесі түрде жазамыз:

$$= 2\int \frac{dx}{(1+x)2\sqrt{x}} = 2\int \frac{d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2} = 2arctg\sqrt{x} + C.$$

Мысал 7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} =$

интеграл астындағы функци $\forall x \neq 0$ үшін анықталған, x^2-ты квадрат түбірден шығарамыз:

$\sqrt{x^2} = |x| = x \cdot \operatorname{sgn} x,$ сонда:

$$= \int \frac{dx}{\operatorname{sgn} x \cdot x^2 \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} =$$

$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ бөлікті тұрақты функциясы болғандықтан, интеграл сыртына шығаруға болады, ал

$d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}dx$ болғандықтан интегралдық кестедегі 12. формула бойынша

$$= -\frac{1}{\operatorname{sgn} x}\int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}} = -\frac{1}{\operatorname{sgn} x}\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)+C =$$

$$= \begin{cases} -\ln\left(\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)+C, \textit{егер} & x > 0 \\ \ln\left(\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)+C, \textit{егер} & x < 0 \end{cases} =$$

егер $x < 0$

$$\ln\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} = -\ln\frac{x}{1-\sqrt{x^2+1}} = -\ln\frac{x\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(1-\sqrt{x^2+1}\right)\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)} =$$

$$= -\ln\frac{x\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}{-x^2} = -\ln\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{-x},$$

сондықтан осы мысалдың қорытынды жауабы:

$$=\begin{cases} -\ln\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}+C, егер\ x>0 \\ -\ln\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{-x}+C, егер\ x<0 \end{cases} = -\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|}+C$$

мұнда $\forall x\neq 0$.

Мысал 8. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=$

интеграл астындағы функция $\forall x\neq 0$ үшін анықталған, x^2-ты квадрат түбірден шығарамыз:

$$\int\frac{\operatorname{sgn} x dx}{x^2\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}=-\int\frac{d\left(\dfrac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{|x|}\right)^2}},\quad |x|>1,$$

онда 9. формула бойынша :

$$-\int\frac{d\left(\dfrac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{|x|}\right)^2}}=-\arcsin\frac{1}{|x|}+C.$$

Мысал 9. $\displaystyle\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}=$

x^2-ты жақшаның сыртына шығарамыз және $|x|=x\operatorname{sgn} x$ екенін ескеріп:

$$=\int\frac{dx}{|x|^3\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{\operatorname{sgn} x}{2}\int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}}d\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=\frac{\operatorname{sgn} x}{2}2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

Мысал 10. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}=$

анықталу облысын табамыз: $x(1+x)>0$ теңсіздігін шешсек:

$X=\{x: x>0\vee x<-1\}$

Егер $x > 0$:

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+x}} = 2\int \frac{d\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}} = 2\ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}\right) + C.$$

Егер $1 + x < 0$ болса

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{-x-1}\sqrt{-x}} = -2\int \frac{d\left(\sqrt{-x-1}\right)}{\sqrt{1+\left(\sqrt{-x-1}\right)^2}} = -2\ln\left(\sqrt{-x-1} + \sqrt{-x}\right) + C.$$

екі шешімді біріктіре отырып, жауапты аламыз:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = 2\operatorname{sgn} x \ln\left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|x+1|}\right) + C, \quad \forall x \notin [-1,0].$$

Мысал 11. $\int \frac{\sin x \cos x dx}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} =$

$\sin x \cos x$ көбейтіндісін дифференциал астына кіргіземіз:

$$\sin x \cos x dx = \frac{d\left(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x\right)}{2\left(a^2 - b^2\right)}, \quad \text{ендеше}$$

$$= \frac{1}{a^2 - b^2}\int \frac{d\left(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x\right)}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} = \frac{1}{a^2 - b^2}\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} + C, \quad a^2 \neq b^2.$$

Мысал 12. $\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x} dx =$

$\left(1+\cos^2 x\right)' = -2\cos x \sin x$ екенін ескере отырып, $-2\sin x \cos x$ көбейткішін дифференциал астына енгіземіз де кестедегі 1. және 2. пайдалансақ:

$$= -\frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+\cos^2 x}\right) d\left(1+\cos^2 x\right) = -\frac{1}{2}\left(1+\cos^2 x\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1+\cos^2 x\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{2}\ln\left(1+\cos^2 x\right) + C.$$

Мысал 13. $\int \sin^5 x \cos x dx =$

интеграл астындағы $\cos x$ көбейткішін дифференциал астына енгіземіз, сонда интеграл астында $\sin x$ - ке қатысты дәрежелік функция шығады:

$$= \int \sin^5 x d(\sin x) = \frac{\sin^6 x}{6} + C$$

Төмендегі мысалдарды *жіктеу* әдісімен тапқан дұрыс.

Мысал 14. $\int x(1-x)^{20}dx =$

бұл мысалда $x = 1-(1-x)$ арқылы жіктесек:

$$= \int (1-x)^{20}dx - \int (1-x)^{21}dx = -\int (1-x)^{20}d(1-x) + \int (1-x)^{21}d(1-x) =$$

$$= -\frac{1}{21}(1-x)^{21} + \frac{1}{22}(1-x)^{22} + C.$$

Мысал 15. $\int \frac{dx}{\sin x} =$

Алдымен интеграл астындағы $\sin x$-ты жарты аргументтің формуласы арқылы түрлендіріп, сосын алымын да, бөлімін де $\cos\frac{x}{2}$-ке көбейтіп, $\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$-ні дифференциал астына кіргіземіз:

$$\frac{dx}{\sin x} = \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{dtg\frac{x}{2}}{tg\frac{x}{2}},$$

сонда кестелік интегралға келеді:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dtg\frac{x}{2}}{tg\frac{x}{2}} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C, \quad x \neq k\pi, k \in Z$$

Мысал 16. $\int \frac{shxchxdx}{\sqrt{sh^4x + ch^4x}} =$

Бұл мысалда да интеграл астындағы функцияны түрлендіріп, дифференциал астына енгізу әдісін қолданамыз:

$$\frac{shxchxdx}{\sqrt{sh^4x + ch^4x}} = \frac{shxchxdx}{\sqrt{\frac{(sh^2x + ch^2x)^2 + (ch^2x - sh^2x)^2}{2}}} =$$

$$\frac{sh2xdx}{2\sqrt{\frac{1}{2}ch^2 2x + \frac{1}{2}}} = \frac{d(ch2x)}{2\sqrt{2}\sqrt{ch^2 2x + 1}}.$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{d(ch2x)}{\sqrt{ch^2 2x + 1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(ch2x + \sqrt{ch^2 2x + 1}\right) + C$$. Сонымен,

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{ch2x}{\sqrt{2}} + \sqrt{ch^4x + sh^4x}\right) + C.$$

Мысал 17. $\int \frac{x^2-1}{x^4+x}dx =$

мұнда интеграл астындағы функцияның алымынан да, бөлімінен де x^2-ті жақшаның сыртына шығарып, сосын алымындағы өрнекті дифференциал астына енгіземіз:

$$\frac{x^2-1}{x^4+x}dx = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$$

сонда кестелік интегралға келеді:

$$= \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right| + C.$$

Мысал 18. $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx =$

x^2-ті келесі түрде түрлендірсек:

$$x^2 = (1-x)^2 - 2(1-x) + 1$$

онда интеграл:

$$\int \frac{x^2dx}{(1-x)^{100}} = \int \frac{(1-x)^2-2(1-x)+1}{(1-x)^{100}}dx = \int \frac{dx}{(1-x)^{98}} - 2\int \frac{dx}{(1-x)^{99}} +$$

$$+\int \frac{dx}{(1-x)^{100}} = \frac{1}{97(1-x)^{97}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{99(1-x)^{99}} + C,\ x \neq 1$$

Мысал 19. $\int x^3 \cdot \sqrt[3]{1+x^2}\,dx =$

интеграл астындағы x^3dx-ті келесі түрде түрлендірейік:

$$x^3dx = \frac{1}{2}x^2dx^2 = \frac{1}{2}\left((1+x^2)-1\right)d(1+x^2),$$

сонда интеграл:

$$\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\left((1+x^2)^{\frac{4}{3}} - (1+x^2)^{\frac{1}{3}}\right)d(1+x^2) =$$

$$= \frac{3}{14}(1+x^2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}} + C.$$